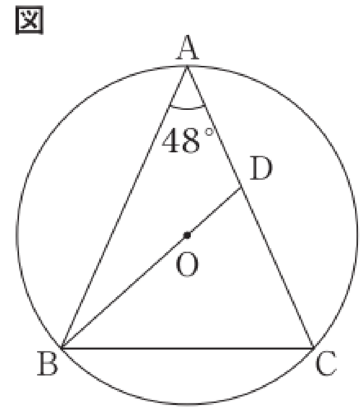
まずは自分で問題を解いてから，下の解説を読みましょう（問題の内容を学習する学年も示していますので，中学１・２年生は該当学年の問題を解いてみましょう）。
解説には，　　内に**解決する際のポイント**を示していますので，参考にして再挑戦してみましょう！

1

やや難　（６）　関数 $y=\frac{1}{2}x^2$ について，x の変域が $-4 \leqq x \leqq 2$ のとき，y の変域を求めよ。

難　（９）　図のように，円Oの円周上に３点A，B，Cを，AB＝ACとなるようにとり，△ABCをつくる。線分BOを延長した直線と線分ACとの交点をDとする。
∠BAC＝48°のとき，∠ADBの大きさを求めよ。

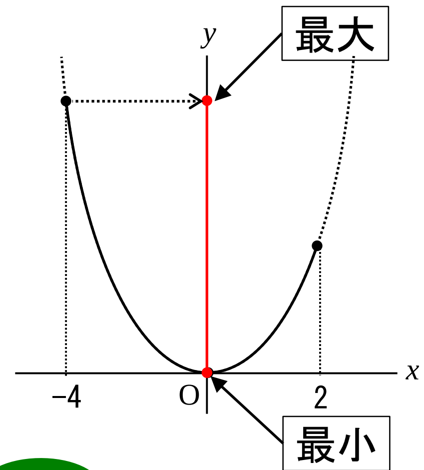
図


どちらも３年生で学習する内容です。

次のように解きます。

（６）

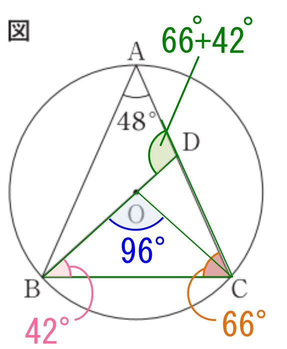
ポイント
x の値が最大，最小となるときに，y の値もそれぞれ最大，最小とならない場合があるので，グラフをかいて，y の値の変化の様子を調べよう。



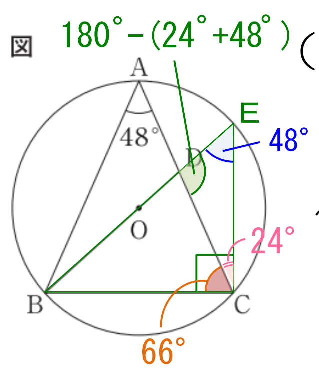
$y=\frac{1}{2}x^2$（$-4 \leqq x \leqq 2$）のグラフは，左図のようになる。
左図から，$x=-4$ のとき，y の値は最大となり，
$x=0$ のとき，y の値は最小となる。
式 $y=\frac{1}{2}x^2$ に $x=-4$ を代入して，$y=8$
$x=0$ を代入して，$y=0$
したがって，（答）$0 \leqq y \leqq 8$

（９）

ポイント
このままの図形だと円周角の定理などが使えないので，それが使えるように，
- 点O（円の中心）と円周上の点を結び，１つの弧に対する円周角と中心角をつくろう。
- 半径を延長するなどして直径をひき，半円の弧に対する円周角（90°）をつくろう。

図


（例１）点Oと点Cを結ぶ。
△ABCは，AB＝ACの二等辺三角形だから，∠ACB＝（180°−48°）÷2＝66°
１つの弧に対する中心角の大きさは，その弧に対する円周角の大きさの２倍だから，
∠BOC＝２∠BAC＝２×48°＝96°
△OBCは，OB＝OCの二等辺三角形だから，∠OBC＝（180°−96°）÷２＝42°
三角形の外角は，その隣にない２つの内角の和に等しいから，△DBCにおいて，
∠ADB＝∠DCB＋∠DBC＝66°＋42°＝（答）108°

図


（例２）線分BDを延長した直線と円周との交点をEとし，点Cと点Eを結ぶ。
線分BEは円Oの直径であり，半円の弧に対する円周角は直角だから，∠BCE＝90°
（例１）と同様に∠ACB＝66°だから，∠ACE＝∠BCE−∠ACB＝24°
$\overset{\frown}{BC}$に対する円周角は等しいから，∠BEC＝∠BAC＝48°
これらから，△DCEにおいて，∠EDC＝180°−（24°＋48°）＝108°
対頂角は等しいから，∠ADB＝∠EDC＝（答）108°

福岡県立高校入試問題の難しい問題にチャレンジしよう！【数学】①

2　紙飛行機の飛行距離を競う大会が行われる。この大会に向けて，折り方が異なる２つの紙飛行機Ａ，Ｂをつくり，飛行距離を調べる実験をそれぞれ30回行った。**図１**，**図２**は，実験の結果をヒストグラムにまとめたものである。例えば，**図１**において，Ａの飛行距離が６ｍ以上７ｍ未満の回数は３回であることを表している。

図１

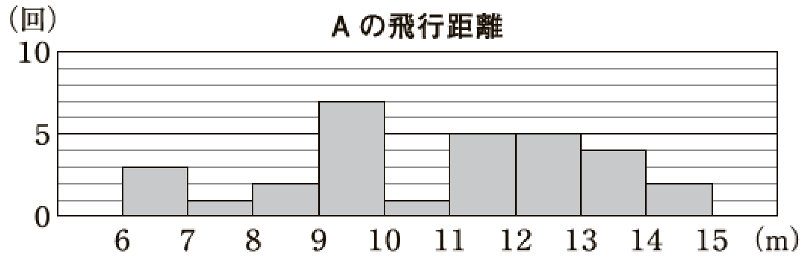
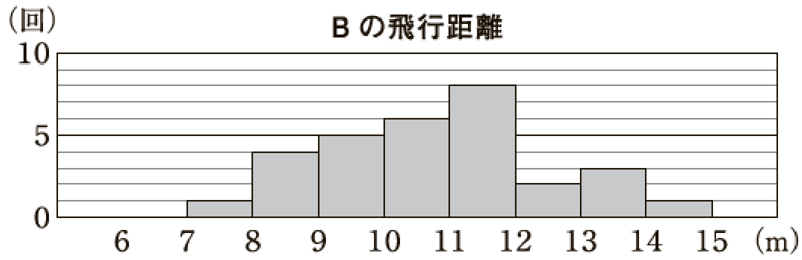
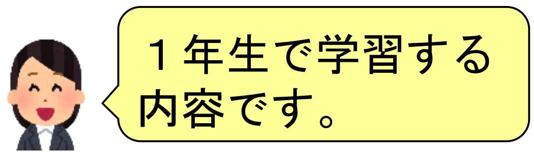


図２





やや難（２）　**図１**，**図２**において，ＡとＢの飛行距離の平均値が等しかったので，飛行距離の中央値と飛行距離の最頻値のどちらかを用いて（どちらを用いてもかまわない。），この大会でより長い飛行距離が出そうな紙飛行機を選ぶ。

このとき，ＡとＢのどちらを選ぶか説明せよ。

説明する際は，中央値を用いる場合は中央値がふくまれる階級を示し，最頻値を用いる場合はその数値を示すこと。

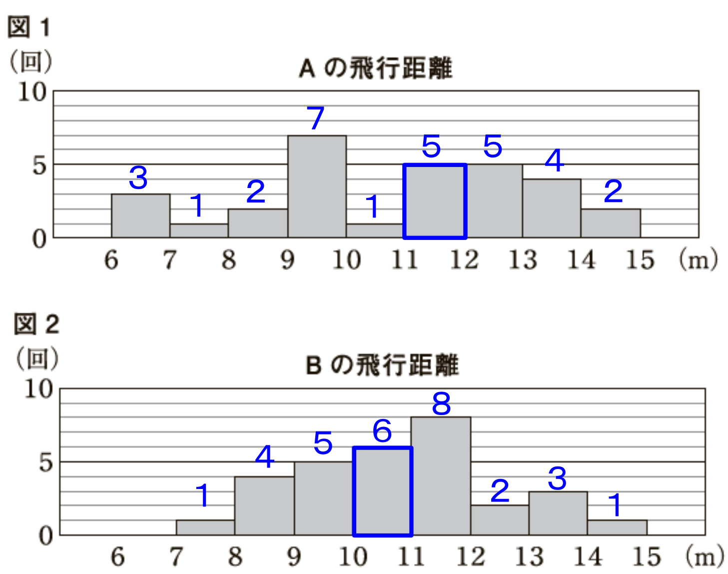
次のように解きます。

○飛行距離の中央値を用いる場合

ポイント　中央値とは，度数の合計が偶数の場合は，大きさの順に並べたときの中央の２つの値の平均値。

↓

度数の合計が30回だから，15，16番目の値がふくまれる階級を調べる。



中央値がふくまれる階級は，ヒストグラムから

Ａは，11m以上12m未満

Ｂは，10m以上11m未満

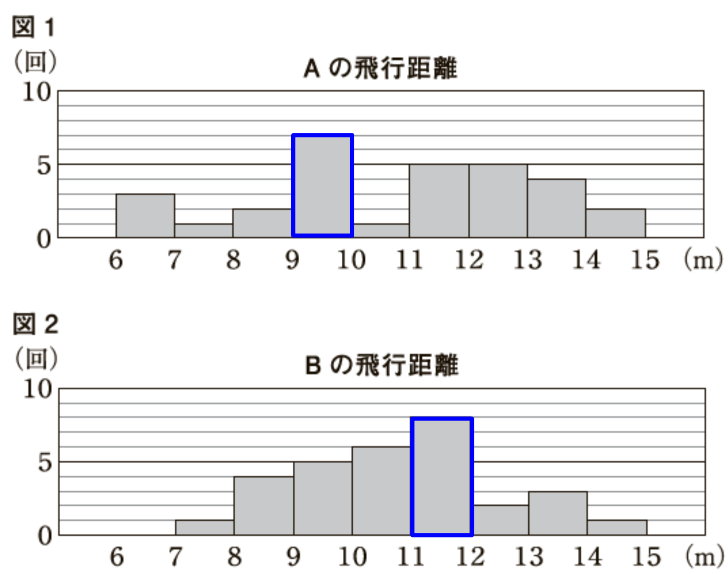
（答）（例）飛行距離の中央値がふくまれる階級は，Ａが11m以上12m未満で，Ｂが10m以上11m未満であり，中央値はＡの方がＢより大きいので，Ａを選ぶ。

○飛行距離の最頻値を用いる場合

ポイント　最頻値とは，ヒストグラムで度数が最も多い階級の階級値（階級の真ん中の値）。

↓

Ａは７回，Ｂは８回が最も多い度数なので，それぞれの階級の階級値を求める。



最頻値は，ヒストグラムから

Ａは，（９＋10）÷２＝9.5m

Ｂは，（11＋12）÷２＝11.5m

（答）（例）飛行距離の最頻値は，Ａが9.5mで，Ｂが11.5mであり，最頻値はＢの方がＡより大きいので，Ｂを選ぶ。

3

孝さんと桜さんは，連続する２つの偶数の積に１を加えた数がどのような数になるか次のように調べた。

調べたこと

$2\times4+1=\ \ 9=3^2$
$4\times6+1=25=5^2$
$6\times8+1=49=7^2$
} 全て奇数の２乗になっている。

調べたことから，次のように予想した。

予想

連続する２つの偶数の積に１を加えた数は，奇数の２乗になる。

難　（３）次に，孝さんと桜さんは，連続する５つの整数のうち，異なる２つの数の積に**１以外の自然数**を加えた数が，整数の２乗になる場合を調べてまとめた。

まとめ

連続する５つの整数のうち，
（ **X** ）と（ **Y** ）の積に（Ⓟ）を加えた数は，（ **Z** ）の２乗になる。

上の**まとめ**はいつでも成り立つ。（ **X** ），（ **Y** ），（ **Z** ）にあてはまるものを，次の**ア**～**オ**からそれぞれ１つ選び，記号をかけ。また，（Ⓟ）にあてはまる１以外の自然数を答えよ。

ア　最も小さい数
イ　２番目に小さい数
ウ　真ん中の数
エ　２番目に大きい数
オ　最も大きい数

３年生で学習する内容です。

次のように解きます。

連続する５つの整数は，整数ｎを用いて，ｎ，ｎ＋１，ｎ＋２，ｎ＋３，ｎ＋４と表される。
この５つの数のうち，（Ｘ），（Ｙ）にあてはまる２つの数の組は左の10通り。

X	Y
ｎ	ｎ＋１
	ｎ＋２
	ｎ＋３
	ｎ＋４
ｎ＋１	ｎ＋２
	ｎ＋３
	ｎ＋４
ｎ＋２	ｎ＋３
	ｎ＋４
ｎ＋３	ｎ＋４

ポイント　２つの数の積を式に表し，その式にどのような自然数を加えれば，(整数)^2 の形に因数分解できるかを考えよう。

Ｘがｎ，Ｙがｎ＋１の場合，２つの数の積は，$n(n+1)=n^2+n$ である。
n^2+n はｎの係数が１なので，どのような自然数を加えても，(整数)^2 の形に因数分解することはできない。

ポイント　(整数)^2 の形に因数分解できる式の形は，ｎの係数が２の倍数で，定数が整数の２乗のときである。
　よって，左の10通りについて，ｎの係数が２の倍数になる場合のみ取り出して考えよう。

$n^2+\underline{2}n+\underline{1}=(n+1)^2$
$n^2+\underline{4}n+\underline{4}=(n+2)^2$
$n^2+\underline{6}n+\underline{9}=(n+3)^2$
$\vdots$
$n^2+\underline{2a}n+\underline{a^2}=(n+a)^2$

上の１０通りのうち，ｎの係数が２の倍数になるのは，
$n(n+2)$，$n(n+4)$，$(n+1)(n+3)$，$(n+2)(n+4)$ の４通りである。
この４通りについて，ｎの係数と定数に着目し，２つの数の積に自然数を加えて整数の２乗になるように因数分解する。

① $n(n+2)=n^2+2n$ ←── ｎの係数が２，定数が０だから
　⇒ $n^2+2n\underline{+1}=(n+1)^2$　１を加えると，$(n+1)^2$ になる。

② $n(n+4)=n^2+4n$ ←── ｎの係数が４，定数が０だから
　⇒ $n^2+4n\underline{+4}=(n+2)^2$　４を加えると，$(n+2)^2$ になる。

③ $(n+1)(n+3)=n^2+4n+3$ ←── ｎの係数が４，定数が３だから
　⇒ $n^2+4n+3\underline{+1}=(n+2)^2$　１を加えると，$(n+2)^2$ になる。

④ $(n+2)(n+4)=n^2+6n+8$ ←── ｎの係数が６，定数が８だから
　⇒ $n^2+6n+8\underline{+1}=(n+3)^2$　１を加えると，$(n+3)^2$ になる。

上の計算結果から，１以外の自然数を加えて整数の２乗になるのは，②の場合である。

（答）（ア：最も小さい数）と（オ：最も大きい数）の積に（ ４ ）を加えた数は，
（ウ：真ん中の数）の２乗になる。　※アとウは順不同

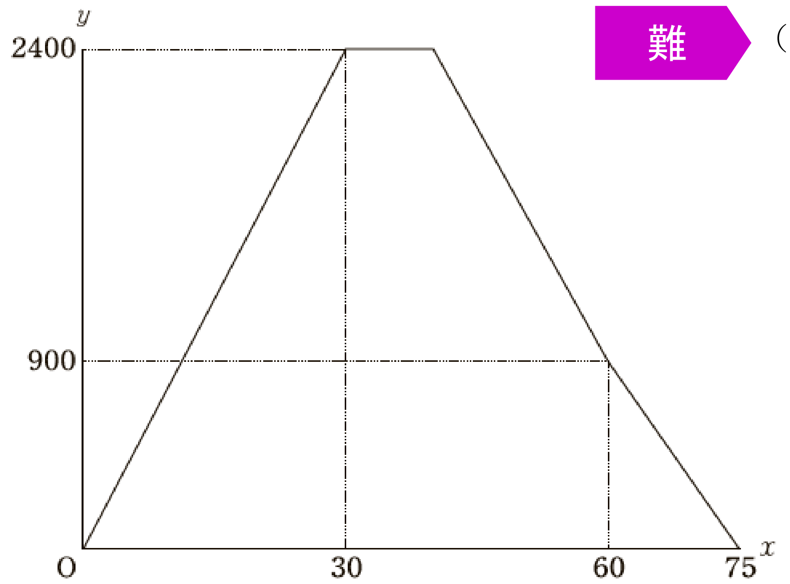
福岡県立高校入試問題の難しい問題にチャレンジしよう！【数学】②

4 希さんの家，駅，図書館が，この順に一直線の道路沿いにあり，家から駅までは900m，家から図書館までは2400m離れている。

希さんは，９時に家を出発し，この道路を図書館に向かって一定の速さで30分間歩き図書館に着いた。図書館で本を借りた後，この道路を図書館から駅まで分速75mで歩き，駅から家まで一定の速さで15分間歩いたところ，10時15分に家に着いた。

図は，９時から x 分後に希さんが家から y m離れているとするとき，９時から10時15分までの x と y の関係をグラフに表したものである。

図

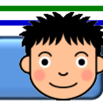


難 (3) 希さんの兄は，10時５分に家を出発し，この道路を駅に向かって一定の速さで走り，その途中で希さんとすれちがい，駅に着いた。希さんの兄は，駅で友達と話し，駅に着いてから15分後に駅を出発し，この道路を家に向かって，家から駅まで走った速さと同じ一定の速さで走ったところ，10時38分に家に着いた。

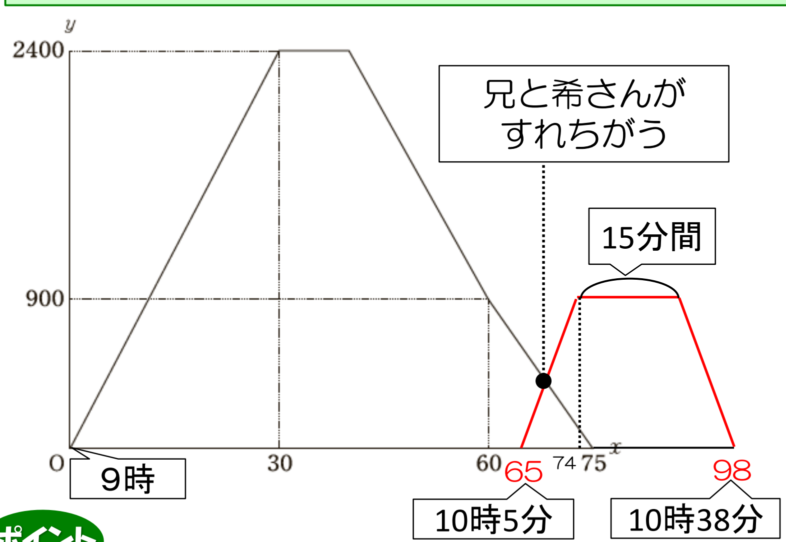
希さんの兄と希さんがすれちがったのは，10時何分何秒か求めよ。

２年生で学習する内容です。

次のように解きます。



ポイント 兄と希さんについての時間と距離の関係を明らかにするため，兄が走った時間と距離の関係を図にかき入れ，兄が走った速さを求めよう。



兄は10時５分に家を出発し，駅に15分間滞在し，10時38分に再び家に着いたので，そのグラフは，左図のようになる。

兄が走った時間は，98－65－15＝18分間であり，兄は家から駅までを同じ速さで往復しているから，分速は，900×２÷18＝100mである。

ポイント 兄と希さんがすれちがった時刻は，上の図の２直線の交点の x 座標なので，この２直線それぞれの式を求め，それらを連立方程式として解こう。

60≦x≦75における希さんについてのグラフは，２点（60，900），（75，0）を通る直線なので，式は，$y=-60x+4500$ …①

また，兄は10時５分に家を出発し，分速100mで駅まで走っているから，65≦x≦74における兄についてのグラフは，点（65，0）を通り，傾き100なので，式は，$y=100x-6500$ …② となる。

①，②を連立方程式として解くと，$x=\dfrac{275}{4}=68\dfrac{3}{4}$ ，$y=375$

よって，兄と希さんがすれ違ったのは10時８$\dfrac{3}{4}$分。$\dfrac{3}{4}$分を秒に直すと，$\dfrac{3}{4}\times60=45$秒

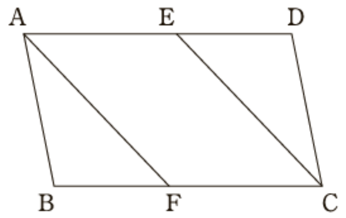
したがって，求める時刻は，（答）10時８分45秒

5

やや難

平行四辺形ＡＢＣＤがある。
図１のように，線分ＡＤ，ＢＣ上に，点Ｅ，Ｆを，ＤＥ＝ＢＦとなるようにそれぞれとり，点Ａと点Ｆ，点Ｃと点Ｅをそれぞれ結ぶ。
このとき，四角形ＡＦＣＥは平行四辺形である。

図１



（１）　次は，**図１**における「四角形ＡＦＣＥは平行四辺形である」ことの**証明**である。

証明

四角形ＡＢＣＤは平行四辺形だから
ア　ＡＥ//ＣＦ　　・・・①
イ　ＡＤ＝ＣＢ　　・・・②
仮定から，　ウ　ＤＥ＝ＢＦ　　・・・③
②，③より，　エ　ＡＤ－ＤＥ＝ＣＢ－ＢＦ
よって，　オ　ＡＥ＝ＣＦ　　・・・④
①，④より，　カ　１組の向かいあう辺が平行でその長さが等しいので
四角形ＡＦＣＥは平行四辺形である。

図２は，**図１**における点Ｅ，Ｆを，線分ＡＤ，ＣＢを延長した直線上にＤＥ＝ＢＦとなるようにそれぞれとったものである。

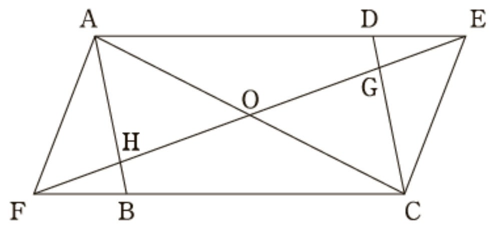
図２

図２においても，四角形ＡＦＣＥは平行四辺形である。このことは，上の**証明**の下線部**ア～カ**のうち，いずれか１つをかき直すことで証明することができる。
上の**証明**を，**図２**における「四角形ＡＦＣＥは平行四辺形である」ことの証明とするには，どの下線部をかき直せばよいか。**ア～カ**から１つ選び，記号をかき，その下線部を正しくかき直せ。

難

（３）　**図４**は，**図３**において，ＡＤ：ＤＥ＝３：１となる場合を表しており，対角線ＥＦと対角線ＡＣとの交点をＯとしたものである。
平行四辺形ＡＦＣＥの面積が12 cm^{2}のとき，四角形ＨＢＣＯの面積を求めよ。

図４



どちらも２年生で学習する内容です。

次のように解きます。

（１）

ポイント 点のとりかたを，図１から図２のようにしたとき，平行四辺形の辺や角の関係について，「変化しないこと」と「変化すること」を整理し，証明を見直そう。

図１

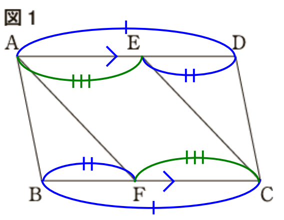
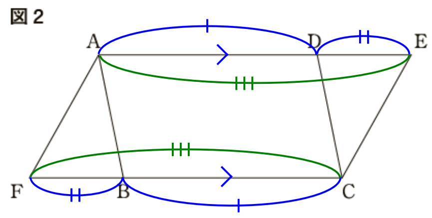


図２

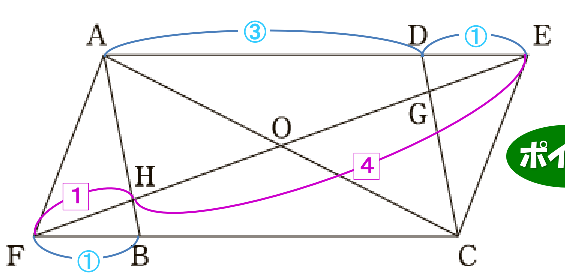


変化しないこと	変化すること
AE//CF AD＝CB DE＝BF	次の線分の長さの関係 図１：AE＝AD－DE，CF＝CB－BF 図２：AE＝AD＋DE，CF＝CB＋BF

整理したことから，証明のア～ウは，かき直さずに（答）エをAD＋DE＝CB＋BFとかき直す と，証明のオ，カも成り立ち，図２における「四角形AFCEは平行四辺形である」ことの証明が完成する。

（３）

ポイント 四角形HBCOは面積の公式を使える形ではなく，また，辺の比と平行四辺形AFCEの面積しかわからないので，それが使えるように，四角形HBCO＝△OFC－△HFBとして面積を求めよう。



△OFCの面積を求める。点Oは平行四辺形AFCEの対角線の交点だから，
△OFC＝平行四辺形AFCE÷４＝１２÷４＝３ ㎠

ポイント △HFBと相似な三角形をみつけ「相似な図形の面積比は，相似比の２乗に等しい」ことなどを用いて，△HFBの面積を求めよう。

△HFB∽△HEA〔∠FHB＝∠EHA（対頂角）
∠BFH＝∠AEH（平行線の錯角は等しい）
⇒２組の角がそれぞれ等しい〕より，
HF：HE＝FB：EA＝DE：EA＝１：４

$$\triangle HEA = \frac{4}{5}\triangle AFE$$
$$= \frac{4}{5} \times \left(\frac{1}{2} \times \text{平行四辺形AFCE}\right)$$
$$= \frac{4}{5} \times \frac{1}{2} \times 12 = \frac{24}{5}$$

→相似な図形の面積比は，相似比の２乗に等しいので，
△HFB：△HEA＝１^2：４^2＝１：１６

$$\text{よって，}\triangle HFB = \frac{1}{16}\triangle HEA$$
$$= \frac{1}{16} \times \frac{24}{5} = \frac{3}{10}$$

したがって，四角形HBCO＝△OFC－△HFB

$$= 3 - \frac{3}{10}$$
$$= \boxed{（答）\frac{27}{10}\ ㎠}$$

福岡県立高校入試問題の難しい問題にチャレンジしよう！【数学】③

6 図１は，正四角すいと直方体をあわせた形で，点A，B，C，D，E，F，G，H，Iを頂点とする立体を表している。BC＝6cm，BF＝5cmである。
図２は，図１に示す立体において，辺BF上に点Pを，BP＝2cmとなるようにとり，点P，H，E，Cを頂点とする四面体PHECをつくったものである。

図１

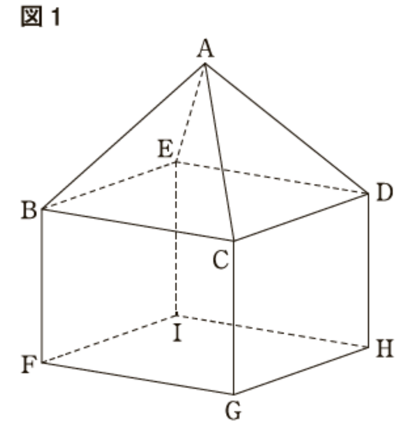
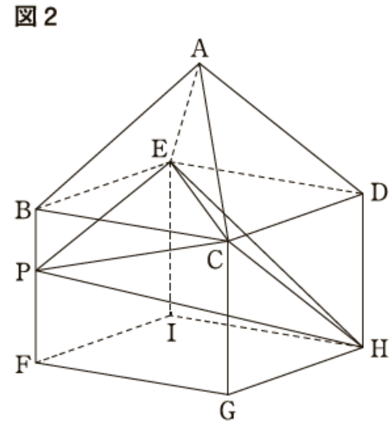


図２



難

（2） 図１に示す立体において，辺AD，AE上にそれぞれ点J，Kを，AJ：JD＝1：2，AK：KE＝1：2となるようにとる。点Jから辺FGに垂線をひき，辺FGとの交点をLとする。
四角形KFGJの面積が$16\sqrt{5}$ cm²のとき，線分JLの長さを求めよ。

難

（3） 図２に示す立体において，四面体PHECの体積を求めよ。

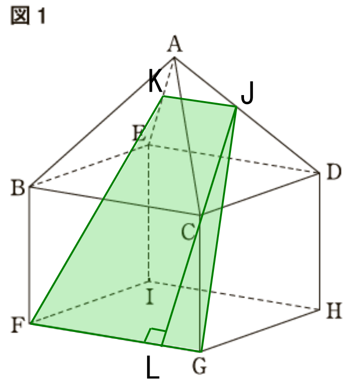
(2)は３年生で，(3)は１年生で学習する内容です。

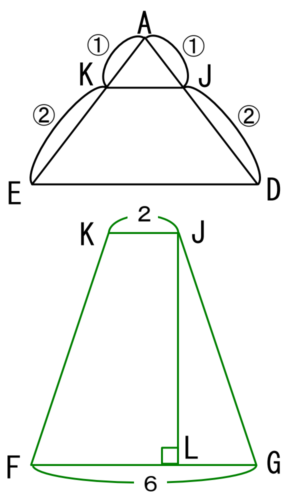
次のように解きます。

（2）

ポイント 四角形KFGJがどのような四角形になるのかを，平行線と線分の比の関係や基本的な図形の性質をもとに明らかにしよう。

図１





△AEDにおいて，

AK：KE＝１：２，AJ：JD＝１：２より，

AK：KE＝ AJ：JDなので，KJ//ED　…①

また，直方体BCDEFGHIより，ED//FG　…②

①，②より，KJ//FG

したがって，四角形KFGJは台形である。

△AEDにおいて，AK：AE＝KJ：EDより，

１：３＝KJ：６

KJ＝２

よって，台形KFGJの面積は，

（２＋６）×JL÷２＝$16\sqrt{5}$　より

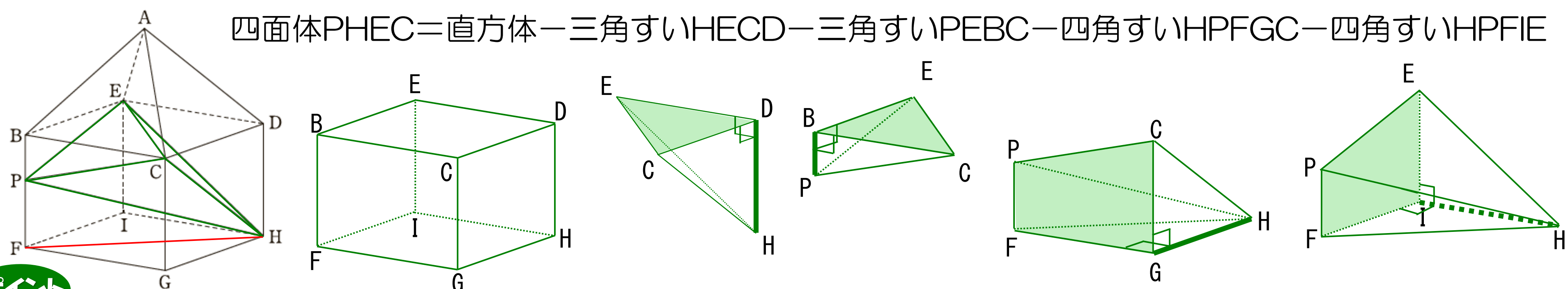
JL＝（答）$4\sqrt{5}$cm

（3）

ポイント 四面体PHECはどの面を底面としてもそれに対する高さを求めるのが難しいので，体積の公式を使うことができるように補助線をひき，立体をいくつかにわけて考えよう。

補助線FHをひき，四面体PHEC＝直方体－四面体PHEC以外の立体（２つの三角すいと２つの四角すい）として体積を求める。

四面体PHEC＝直方体－三角すいHECD－三角すいPEBC－四角すいHPFGC－四角すいHPFIE



ポイント ４つの角すいは，色を付けた面を底面，太い線を高さとみて，それぞれの体積を求めよう。

三角すいHECD＝△ECD×DH÷３＝（６×６÷２）×５÷３＝３０ cm³

三角すいPEBC＝△EBC×BP÷３＝（６×６÷２）×２÷３＝１２ cm³

四角すいHPFGC＝台形PFGC×GH÷３＝｛（３＋５）×６÷２｝×６÷３＝４８ cm³

四角すいHPFIE＝台形PFIE×IH÷３＝｛（３＋５）×６÷２｝×６÷３＝４８ cm³

よって，四面体PHEC＝直方体－（４つの角すい）＝６×６×５－（30＋12＋48＋48）＝（答）42cm³